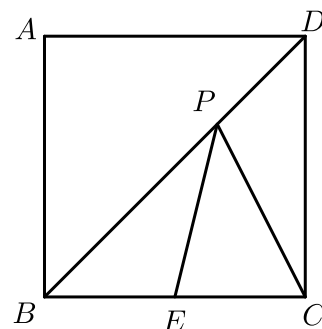


第1讲 四边形中的最值问题（练习）

一、将军饮马问题

1. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， E 为边 BC 的中点， P 为 BD 上的一个动点，则 $PC + PE$ 的最小值是（ ）。



A. $2\sqrt{5}$

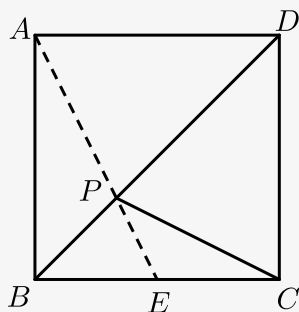
B. $3\sqrt{5}$

C. $3\sqrt{2}$

D. $2 + 2\sqrt{2}$

【答案】 A

【解析】 点 A 和 C 关于 BD 对称，
 $\therefore AE$ 即为 $PC + PE$ 的
最小值，
在 $\text{Rt}\triangle ABE$ 中，

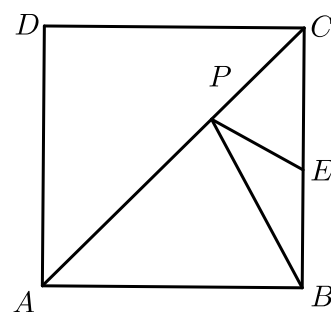


$$AE = \sqrt{AB^2 + BE^2} = 2\sqrt{5},$$

故选A.

【标注】 【知识点】 线段和的最小值

2. 如图，在正方形 $ABCD$ 中， $AB = 8$ ， E 是 BC 的中点，点 P 是对角线 AC 上一动点，则 $PE + PB$ 的最小值为 _____。

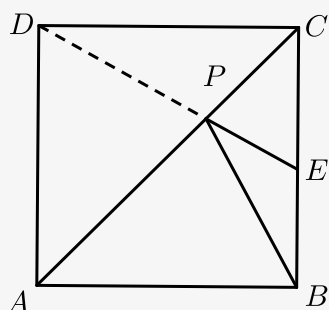


【答案】 $4\sqrt{5}$

【解析】 $\because PE + PB = PE + PD$,

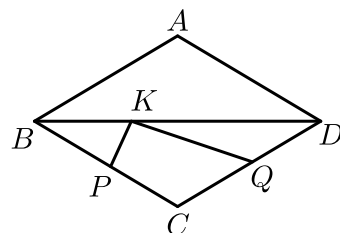
$$\therefore (PE + PB)_{\min} = DE = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}.$$

故答案为： $4\sqrt{5}$.



【标注】【知识点】线段和的最小值

3. 如图，点 P 、 Q 是边长为2的菱形 $ABCD$ 中两边 BC 和 CD 的中点， K 是 BD 上一动点，则 $KP + KQ$ 的最小值为 _____ .



【答案】 2

【解析】 作点 P 关于 BD 的对称点 P' ，连接 $P'Q$ 交 BD 于 K ，

此时 $KP + KQ$ 有最小值，最小值为 $P'Q$ 的长 .

$\because$ 菱形 $ABCD$ 关于 BD 对称， P 是 BC 边上的中点，

$\therefore P'$ 是 AB 的中点，

又 $\because Q$ 是 CD 边上的中点，

$$\therefore BP' \parallel CQ,$$

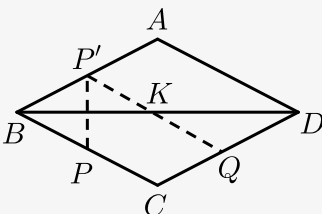
$$BP' = CQ,$$

$\therefore$ 四边形 $BCQP'$ 是平行
四边形,

$$\therefore P'Q = BC = 2,$$

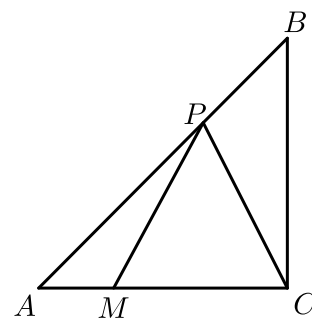
$\therefore PK + KQ = P'Q = 2$, 即 $KP + KQ$ 的最小值为 2.

故答案为: 2.



【标注】【知识点】线段和的最小值

4. 如图, 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 点 M 在 AC 边上, 且 $AM = 2$, $MC = 6$, 动点 P 在 AB 边上, 连接 PC , PM , 则 $PC + PM$ 的最小值是 ().



A. $2\sqrt{10}$

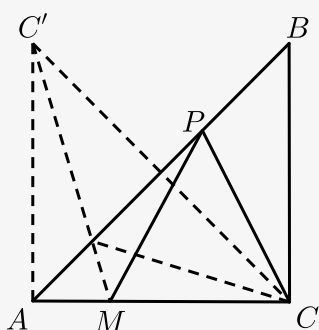
B. 8

C. $2\sqrt{17}$

D. 10

【答案】 C

【解析】 如图, 过点作 $CO \perp AB$ 于 O , 延长 BO 到 C' , 使 $OC' = OC$, 连接



MC' , 交 AB 于 P ,

此时 $MC' = PM + PC' = PM + PC$ 的值最小,

连接 AC' ,

$\because CO \perp AB$, $AC = BC$, $\angle ACB = 90^\circ$,

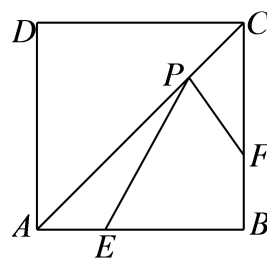
$$\therefore \angle ACO = \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ,$$

$\because CO = OC'$, $CO \perp AB$,

$\therefore AC' = CA = AM + MC = 8$,
 $\therefore \angle OC'A = \angle OCA = 45^\circ$,
 $\therefore \angle C'AC = 90^\circ$,
 $\therefore C'A \perp AC$,
 $\therefore MC' = \sqrt{AM^2 + AC^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2\sqrt{17}$,
 $\therefore PC + PM$ 的最小值为 $2\sqrt{17}$.
 故选C .

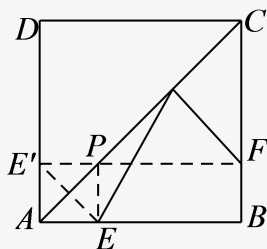
【标注】【知识点】解直角三角形的综合应用

5. 如图，正方形 $ABCD$ 的面积为2，点 E ， F 分别在边 AB ， BC 上，且 $AE = BF$ ， P 是 AC 上的动点， $PE + PF$ 的最小值为_____ .



【答案】 $\sqrt{2}$

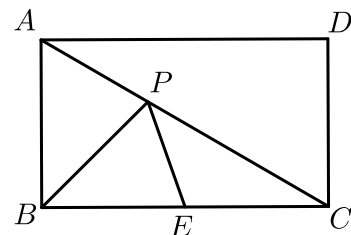
【解析】 在 AD 上截取 AE' ，使 $AE' = AE$ ，连接 PE ，



$\therefore$ 正方形 $ABCD$ ， AC 为对角线，
 $\therefore E$ 与 E' 关于 AC 对称， $PE' = PE$ ，
 $\therefore BF = AE$ ，
 $\therefore AE' = BF$ ，四边形 $ABFE'$ 为矩形，
 连接 $E'F$ 与 AC 的交点即为点 P ，此时 $PE + PF$ 有最小值，
 $\therefore S_{\text{正方形}ABCD} = 2$ ，
 $\therefore AB = EF = \sqrt{2}$ ，
 $\therefore PE + PF$ 的值最小值为 $E'F$ 的长度为 $\sqrt{2}$.

【标注】【知识点】线段和的最小值

6. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， E 为 BC 的中点， P 为对角线 AC 上的一个动点，若 $AB = 2$ ， $BC = 2\sqrt{3}$ ，则 $PE + PB$ 的最小值为（ ）。



A. $\sqrt{3}$

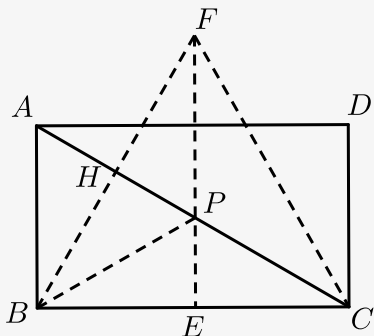
B. 3

C. $2\sqrt{3}$

D. 6

【答案】B

【解析】作 $BH \perp AC$ 于 H ，延长 BH 到 F ，
使 $HF = BH$ ，连接 FE 交 AC 于 P ，
此时 $PB + PE$ 最小，
最小值是 EF 的长，连接 CF ，

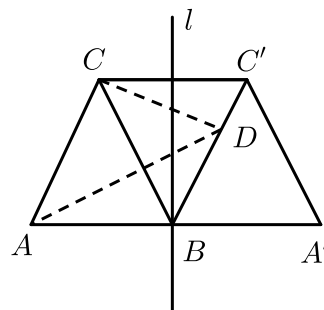


$\because$ 矩形 $ABCD$ ，
 $\therefore \angle ABC = 90^\circ$ ，
 $\therefore \tan \angle ACB = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，
 $\therefore \angle ACB = 30^\circ$ ，
 $\because BH \perp AC$ ， $HF = BH$ ，
 $\therefore \angle CBH = 60^\circ$ ， $BC = CF = 2\sqrt{3}$ ，
 $\therefore \triangle BCF$ 是等边三角形，
 $\because E$ 是 BC 的中点，
 $\therefore EF \perp BC$ ， $CE = \frac{1}{2}BC = \sqrt{3}$ ，
 $\therefore EF = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})^2} = 3$ ，
 $\therefore PB + PE$ 的最小值是3。

故答案为：3 .

【标注】【知识点】线段和的最小值

7. 如图，正 $\triangle ABC$ 的边长为2，过点 B 的直线 $l \perp AB$ ，且 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'BC'$ 关于直线 l 对称 .



(1) 连接 CC' ，判断四边形 $CBA'C'$ 的形状并进行证明 .

(2) D 为线段 BC' 上一动点，求 $AD + CD$ 的最小值 .

【答案】(1) 菱形 .

(2) 4 .

【解析】(1) 菱形，

$\because \triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 关于直线 l 对称，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，

$\therefore AB = A'B$ ， $BC = BC'$ ，

$\because \triangle ABC$ 为正三角形，

$\therefore \triangle A'B'C'$ 也为正三角形，

$\therefore BA' = A'C' = BC' = BC$.

$\because l \perp AB$ ，

$\therefore \angle DBA' = 90^\circ$ ，

$\because C$ 、 C' 关于直线 l 对称，

$\therefore \angle BDC' = 90^\circ$ ，

$\therefore CC' \parallel BA'$ ，

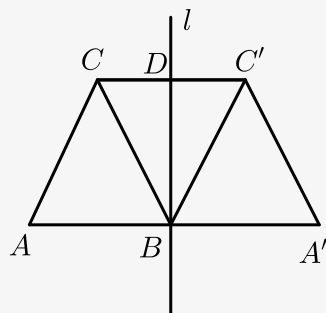
$\because \angle CBA = C'A'B = 60^\circ$ ，

$\therefore CB \parallel C'A$ ，

$\therefore$ 四边形 $CBA'C'$ 为平行四边形，

$\therefore BC = BA'$ ，

$\therefore$ 平行四边形 $CBA'C'$ 为菱形 .



(2) $\because CD = A'D$,
 $\therefore CD + AD = A'D + AD$,
 当A、D、A'三点共线时 ,
 $A'D + AD$ 最短 ,
 $\therefore (CD + AD)_{\min} = AA'$,
 $\because \triangle ABC$ 边长为2 ,
 $\therefore AA' = 4$,
 $\therefore (CD + AD)_{\min} = 4$.

【标注】【知识点】菱形的判定-从四边形

【知识点】两点之间线段最短

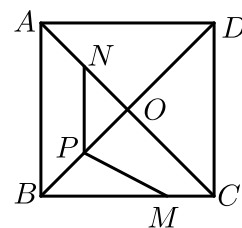
【知识点】轴对称的性质

【知识点】全等三角形的对应边与角

【知识点】等边三角形的性质

【能力】推理论证能力

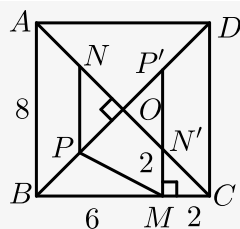
8. 如图，在正方形ABCD中， $AB = 8$ ，AC与BD交于点O，N是AO的中点，点M在BC边上，且 $BM = 6$ ，P为对角线BD上一点，则 $PM - PN$ 的最大值为 _____ .



【答案】 2

【解析】 作N关于BD的对称点N' (OC中点) ,

连接MN'并延长 ,



与BD交于 P' ，

则 $(PM - PN)_{\max}$

$= P'M - P'N'$

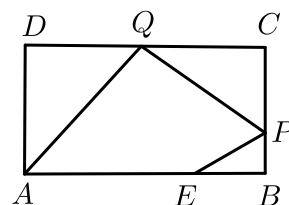
$= MN'$ 。

不难求得： $\triangle CMN'$ 为等腰Rt $\triangle \Rightarrow MN' = 2$ 。

【标注】【能力】推理论证能力

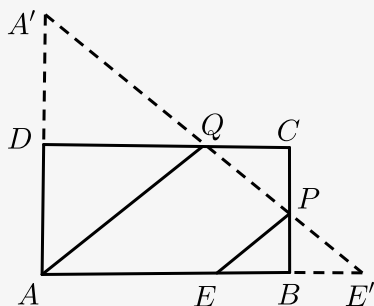
【知识点】正方形的性质

9. 如图，已知长方形ABCD中 $AD = 3$ ， $AB = 6$ ，点E在AB边上且 $BE = 2$ ，点P，Q分别是边BC，CD的动点（均不与顶点重合），四边形AEPQ的周长最小值是_____。



【答案】 14

【解析】 如图所示，



作E关于BC的对称点 E' ，点A关于D的对称点 A' ，连接 $A'E'$ ，四边形AEPQ的周长最小，

$\therefore AD = A'D = 3$ ， $BE = BE' = 2$ ，

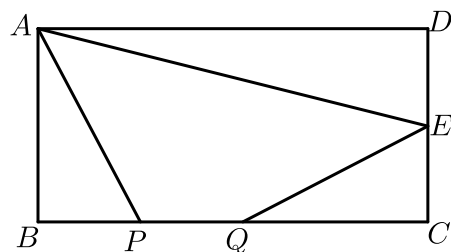
$\therefore AA' = 6$ ， $AE' = 8$ 。

$\therefore A'E' = 10$ 。

$\therefore$ 四边形AEPQ的周长最小值是14。

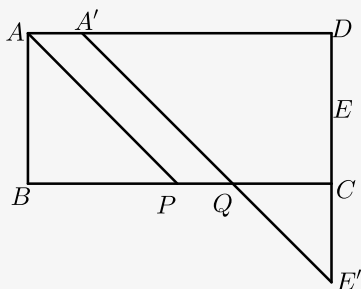
【标注】【知识点】四边形周长最小

10. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 7$ ， E 为 CD 的中点，若 P 、 Q 为 BC 边上的两个动点，且 $PQ = 2$ ，若想使得四边形 $APQE$ 的周长最小，则 BP 的长度应为 _____ 。



【答案】 $\frac{10}{3}$

【解析】在 AD 上截取 $AA' = 2$ ，



过点 E 关于直线 BC 的对称点 E' ，

连接 $A'E'$ 交 BC 于点 Q ，

截取 $PQ = 2$ ， P ， Q 两点即为所求。

$\because$ 四边形 $ABCD$ 为矩形， $AB = 4$ ， $BC = 7$ ，

$\therefore CD = AB = 4$ ，

$\therefore BC \parallel AD$ ，

$BC = AD = 7$ ， $A'D = AD - AA' = 5$ ，

$\because E$ 为 CD 中点，

$\therefore CE = DE = 2$ ，

$\therefore CE' = 2$ ，

$\because CQ \parallel A'D$ ，

$\angle CE'Q \sim \angle DE'A'$ ，

$\therefore \triangle CE'Q \sim \triangle DE'A'$ ，

$$\therefore \frac{CQ}{A'D} = \frac{CE'}{E'D}，$$

$$\therefore \frac{CQ}{A'D} = \frac{CE'}{E'D}，$$

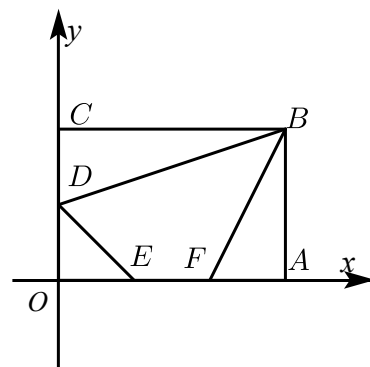
$$\frac{CQ}{5} = \frac{2}{6},$$

$$CQ = \frac{5}{3},$$

$$\therefore BP = BC - PQ - CQ = 7 - 2 - \frac{5}{3} = \frac{10}{3}.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

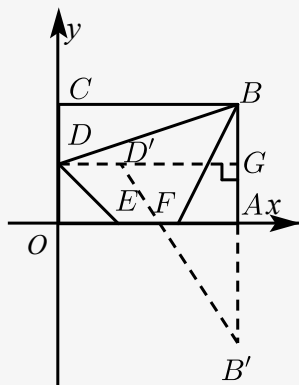
11. 在平面直角坐标系中，矩形*OABC*如图所示．点*A*在*x*轴正半轴上，点*C*在*y*轴正半轴上，且*OA* = 6，*OC* = 4，*D*为*OC*中点，点*E*、*F*在线段*OA*上，点*E*在点*F*左侧，*EF* = 2．当四边形*BDEF*的周长最小时，最小周长为 _____ ．



【答案】 $2\sqrt{10} + 2\sqrt{13} + 2$

【解析】 以*D*，*E*，*F*为顶点作平行四边形*DD'FE*，

作*B*关于*x*轴对称点*B'*，连接*B'D'*，



由题意得： $DD' = EF = 2$ ， $BB' = 8$ ，

Rt△*B'GD'*中， $B'G = 6$ ， $D'G = 4$ ，

$$\therefore B'D' = 2\sqrt{13},$$

Rt△*BCD*中， $BC = 6$ ， $CD = 2$ ，

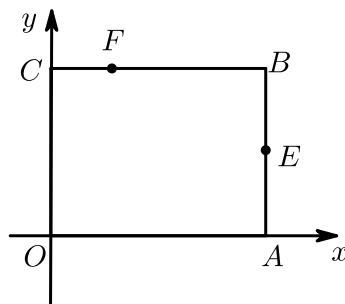
$$\therefore BD = 2\sqrt{10}.$$

$$C_{\text{四边形}BDEF} = BD + B'D' + EF$$

$$= 2\sqrt{10} + 2\sqrt{13} + 2.$$

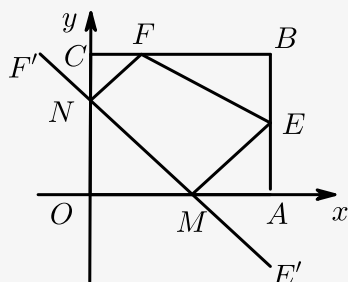
【标注】【知识点】动点与平行四边形问题

12. 如图，矩形 $OABC$ 放在以 O 为原点的平面直角坐标系中， $A(3,0)$ ， $C(0,2)$ ，点 E 是 AB 的中点，点 F 在 BC 边上，且 $CF = 1$ ，若 M 为 x 轴上的动点， N 为 y 轴上的动点，则四边形 $MNFE$ 的周长最小值是 _____ .



【答案】 $5 + \sqrt{5}$

【解析】



由图可得： $E(3,1)$ ； $F(1,2)$

如图，作点 E 关于 x 轴的对称点 E' ，

作点 F 关于 y 轴的对称点 F' ，连接 $E'F'$ ，分别与 x 轴、 y 轴交于点 M 、 N ，连接 FN 、 NM 、 ME ，此时四边形 $MNFE$ 的周长最小。

$\therefore E'(3,-1)$ ， $F'(-1,2)$ ，

设直线 $E'F'$ 的解析式为 $y = kx + b$ ，有 $\begin{cases} 3k + b = -1 \\ -k + b = 2 \end{cases}$ ，

解这个方程组，得 $\begin{cases} k = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{5}{4} \end{cases}$ ，
 $\therefore$ 直线 $E'F'$ 的解析式为 $y = -\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$ 。

当 $y = 0$ 时， $x = \frac{5}{3}$ ，

$\therefore M$ 点的坐标为 $(\frac{5}{3}, 0)$ 。

当 $x = 0$ 时， $y = \frac{5}{4}$ ，

$\therefore N$ 点的坐标为 $(0, \frac{5}{4})$ 。

$\therefore E$ 与 E' 关于 x 轴对称， F 与 F' 关于 y 轴对称，

$\therefore NF = NF'$ ， $ME = ME'$ ， $F'B = 4$ ， $E'B = 3$ 。

在 $\text{Rt}\triangle BE'F'$ 中, $F'E' = \sqrt{F'B'^2 + E'B'^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$.

$\therefore FN + NM + ME = F'N + NM + ME' = F'E' = 5$.

在 $\text{Rt}\triangle BEF$ 中, $EF = \sqrt{BE^2 + BF^2}$.

$\therefore FN + NM + ME + EF = 5 + \sqrt{5}$,

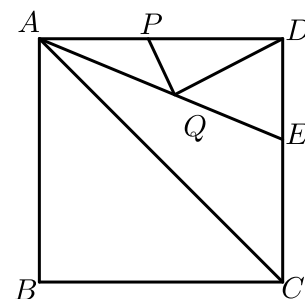
即四边形 $MNFE$ 的周长最小值是 $5 + \sqrt{5}$.

【标注】【知识点】矩形的性质

【能力】推理论证能力

【能力】运算能力

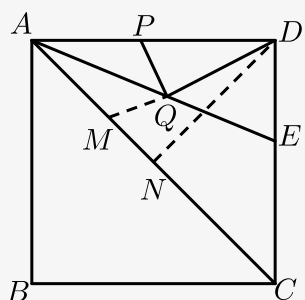
13. 如图, 正方形 $ABCD$ 的边长是4, $\angle DAC$ 的平分线交 DC 于点 E , 若点 P 、 Q 分别是 AD 和 AE 上的动点, 则 $DQ + PQ$ 的最小值是 _____ .



【答案】 $2\sqrt{2}$

【解析】方法一：如图1, 在 AE 上取点 M , 使得 $AM = AP$, 作

$DN \perp AE$ 于点 N ,



$\therefore AE$ 是 $\angle BAD$ 的平分线,

$\therefore \angle DAE = 90^\circ \div 2 = 45^\circ$,

$\therefore \angle DAF = 22.5^\circ$,

$\therefore \angle EAF = 45^\circ - 22.5^\circ = 22.5^\circ$,

$\therefore \angle DAF = \angle EAF$,

在 $\triangle APQ$ 和 $\triangle AMQ$ 中,

$$\begin{cases} AP = AM \\ \angle PAQ = \angle MAQ, \\ AQ = AQ \end{cases}$$

$$\therefore \triangle APQ \triangle AMQ,$$

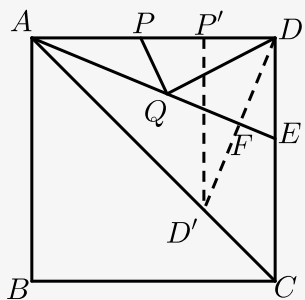
$$\therefore PQ = MQ,$$

$$\therefore DQ + PQ = DQ + MQ = DM,$$

$$\therefore DN \perp AE, DN = AD \times \sin 45^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2},$$

$$\therefore DQ + PQ \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{2}.$$

方法二：作 D 关于 AE 的对称点 D' ，再过 $D'P' \perp AD$ 于 P' ，



$$\therefore DD' \perp AE,$$

$$\therefore \angle AFD = \angle AFD',$$

$$\therefore AF = AF, \angle DAE = \angle CAE,$$

$$\therefore \triangle DAF \cong \triangle D'AF,$$

$$\therefore D' \text{ 是 } D \text{ 关于 } AE \text{ 的对称点, } AD' = AD = 4,$$

$$\therefore D'P' \text{ 即为 } DQ + PQ \text{ 的最小值,}$$

$$\therefore \text{ 四边形 } ABCD \text{ 是正方形,}$$

$$\therefore \angle DAD' = 45^\circ,$$

$$\therefore AP' = P'D',$$

$$\therefore \text{ 在 } \text{Rt} \triangle AP'D' \text{ 中,}$$

$$P'D'^2 + AP'^2 = AD'^2, AD'^2 = 16,$$

$$\therefore AP' = P'D',$$

$$2P'D'^2 = AD'^2, \text{ 即 } 2P'D'^2 = 16,$$

$$\therefore P'D' = 2\sqrt{2},$$

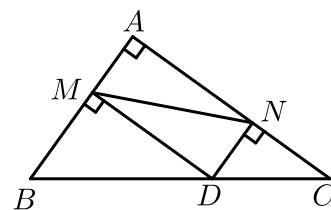
$$\text{即 } DQ + PQ \text{ 的最小值为 } 2\sqrt{2},$$

$$\text{故答案为: } 2\sqrt{2}.$$

【标注】【知识点】线段和的最小值

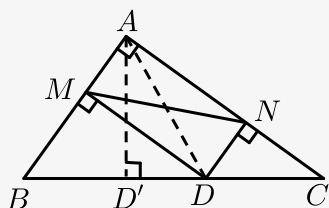
二、线段最值问题

14. 如图，在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ，且 $AB = 9$ ， $AC = 12$ ，点 D 是斜边 BC 上的一个动点，过点 D 分别作 $DM \perp AB$ 于点 M ， $DN \perp AC$ 于点 N ，连接 MN ，则线段 MN 的最小值为 _____。



【答案】 $\frac{36}{5}$

【解析】 连 AD ，



$\because \angle A = 90^\circ$ 且 $DM \perp AB$ ， $DN \perp AC$ ，

$\therefore$ 四边形 $AMDN$ 为矩形，

$\therefore AD = MN$ ，

$\therefore A$ 到 BC 连线中垂线段最短，

$\therefore MN$ 最小值为 BC 边上高，

$\therefore 2S_{\triangle ABC} = AB \cdot AC = BC \cdot h$ 。

$\because AB = 9$ ， $AC = 12$ ，

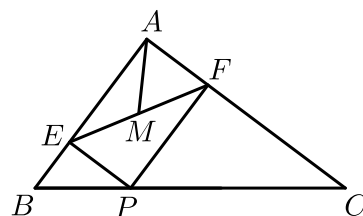
$\therefore BC = 15$ ，

$\therefore h = \frac{9 \times 12}{15} = \frac{36}{5}$ 。

【标注】 【知识点】 矩形的性质

【知识点】 垂线段最短

15. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = 3$ ， $AC = 4$ ， $BC = 5$ ， P 为边 BC 上一动点， $PE \perp AB$ 于 E ， $PF \perp AC$ 于 F ， M 为 EF 中点，则 AM 的最小值为 _____。

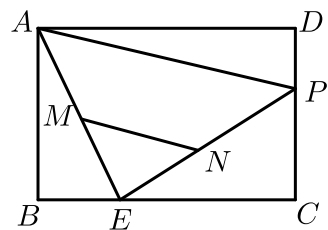


【答案】 $\frac{6}{5}$

【解析】 $\because AB = 3, AC = 4, BC = 5,$
 $\therefore \angle EAF = 90^\circ,$
 $\because PE \perp AB \text{ 于 } E, PF \perp AC \text{ 于 } F,$
 $\therefore \text{四边形 } AEPF \text{ 是矩形},$
 $\therefore EF, AP \text{ 互相平分. 且 } EF = AP,$
 $\therefore EF, AP \text{ 的交点就是 } M \text{ 点}.$
 $\therefore \text{当 } AP \text{ 的值最小时, } AM \text{ 的值就最小},$
 $\therefore \text{当 } AP \perp BC \text{ 时, } AP \text{ 的值最小, 即 } AM \text{ 的值最小}.$
 $\therefore \frac{1}{2}AP \cdot BC = \frac{1}{2}AB \cdot AC,$
 $\therefore AP \cdot BC = AB \cdot AC.$
 $\because AB = 3, AC = 4, BC = 5,$
 $\therefore 5AP = 3 \times 4,$
 $\therefore AP = \frac{12}{5},$
 $\therefore AM = \frac{6}{5},$
故答案为: $\frac{6}{5}.$

【标注】【知识点】矩形的性质

16. 如图, 矩形 $ABCD$ 中, $AB = 6, BC = 8, E$ 是 BC 上一点 (不与 B, C 重合), 点 P 在边 CD 上运动, M, N 分别是 AE, PE 的中点, 线段 MN 长度的最大值是 _____.



【答案】 5

【解析】 $\because M$ 为 AE 中点, N 为 EP 中点,
 $\therefore MN$ 为 $\triangle AEP$ 的中位线,
 $\therefore MN = \frac{1}{2}AP.$
若要 MN 最大, 则使 AP 最大.
 $\because P$ 在 CD 上运动, 当 P 运动至点 C 时 PA 最大,
此时 $PA = CA$ 是矩形 $ABCD$ 的对角线,

$\therefore AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 10$,
 $\therefore MN$ 的最大值 $= \frac{1}{2}AC = 5$.
 故答案为 : 5 .

【标注】【知识点】矩形的性质

【知识点】勾股定理

【知识点】中位线定理及其应用

17. 在矩形纸片 $ABCD$ 中 , $AB = 5$, $AD = 3$, 点 E 、 F 在矩形的边上 , 连接 EF , 将纸片沿 EF 折叠 , 点 D 的对应点为点 P .

(1) 如图1 , 若点 P 在边 AB 上 , 当点 P 与点 A 重合时 , 则 $\angle DEF = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$, 当点 E 与点 A 重合时 , 则 $\angle DEF = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$.

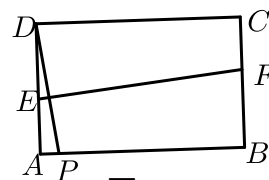


图 1

(2) 如图2 , 若点 P 在边 AB 上 , 且点 E 、 F 分别在 AD 、 DC 边上 , 则线段 AP 的取值范围是 $\underline{\hspace{1cm}}$.

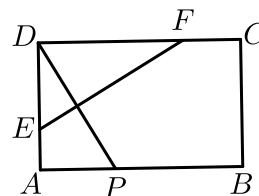


图 2

【答案】(1) 90 ; 45

(2) $1 \leq AP \leq 3$

【解析】(1) 当点 P 与点 A 重合时 ,

$\therefore EF$ 是 AD 的中垂线 ,

$\therefore \angle DEF = 90^\circ$,

当点 E 与点 A 重合时 ,

此时 $\angle DEF = \frac{1}{2} \angle DAB = 45^\circ$.

故答案为 : 90 , 45 .

(2)

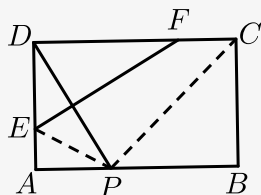


图 2

连接 PE ，如图2所示：

则 EF 使 PD 得中垂线，

$$\therefore PE = DE,$$

在 $\triangle APE$ 中， $AP \leq AE + PE = AE + DE = AD = 3$ ，

即 $AP \leq 3$ ，

当 F 与 C 重合时， AP 的值最小，连接 CP ，

由折叠的性质得： $CP = CD = 5$ ，

在 $\text{Rt}\triangle CBP$ 中，由勾股定理得： $PB = \sqrt{CP^2 - CD^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ ，

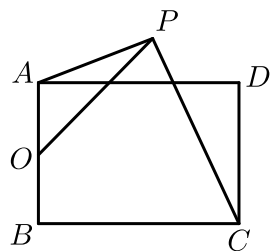
$$\therefore AP = AB - PB = 1,$$

$\therefore$ 线段 AP 的取值范围是： $1 \leq AP \leq 3$ 。

故答案为： $1 \leq AP \leq 3$ 。

【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

18. 如图，在矩形 $ABCD$ 中， $BC = 2\sqrt{5}$ ， $AB = 4$ ， O 为边 AB 的中点， P 为矩形 $ABCD$ 外一动点，且 $\angle APC = 90^\circ$ ，则线段 OP 的最大值为（ ）。



A. $5 + \sqrt{3}$

B. $3 + \sqrt{5}$

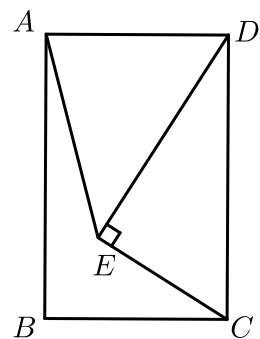
C. $4\sqrt{5} - 2$

D. $2\sqrt{3} + 1$

【答案】 B

【标注】【知识点】动点与平行四边形问题

19. 如图，长方形 $ABCD$ 中， $AB = 6$ ， $BC = 4$ ，在长方形的内部以 CD 边为斜边任意作 $\text{Rt}\triangle CDE$ ，连接 AE ，则线段 AE 长的最小值是 _____。



【答案】 2

【解析】 方法一：如图，取 CD 的中点 F ，连接 AF ，当 A 、 E 、 F 三点共线时 AE 长取得最小值，

$$\text{则 } DF = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

在长方形 $ABCD$ 中， $AD = BC = 4$ ，

$$\text{由勾股定理得， } AF = \sqrt{AD^2 + DF^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5,$$

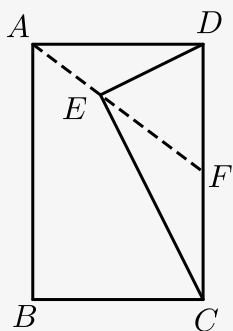
$\because F$ 是 $\text{Rt}\triangle CDE$ 斜边 CD 的中点，

$$\therefore EF = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2} \times 6 = 3,$$

$$\therefore AE = AF - EF = 5 - 3 = 2,$$

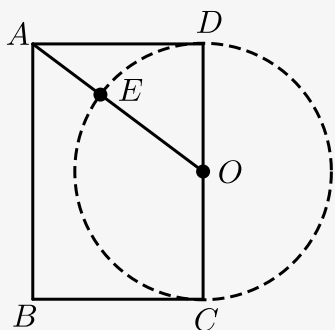
即线段 AE 长的最小值是2.

故答案为：2.



方法二： $\because \angle DEC = 90^\circ$ ，

$\therefore$ 点 E 在以 DC 为直径的圆上，如图，



取 DC 中点为 O ，连接 AO 交 DC 于点 E ，此时 AE 最小，

$$AE = AO - OE,$$

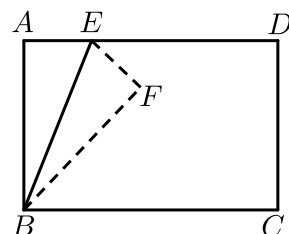
在 $Rt\triangle ADO$ 中，

$$AO = \sqrt{AD^2 + OD^2} = 5,$$

$$\therefore AE = 5 - 3 = 2.$$

【标注】【知识点】直接用勾股求边长；直角三角形斜边中线性质的应用

20. 如图， D 在矩形 $ABCD$ 中， $AB = 4$ ， $BC = 6$ ， E 是边 AD 一个动点，将 $\triangle ABE$ 沿 BE 对折成 $\triangle BEF$ ，则线段 DF 长的最小值为 _____ .



【答案】 $2\sqrt{13} - 4$

【解析】 如图，连接 DF 、 BD ，

由图可知， $DF > BD - BF$ ，

当点 F 落在 BD 上时， DF 取得最小值，且

最小值为 $BD - BF$ 的长，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，

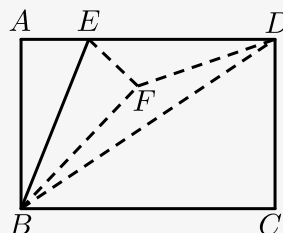
$$\therefore AB = CD = 4, BC = 6,$$

$$\therefore BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 2\sqrt{13},$$

由折叠性质知 $AB = BF = 4$ ，

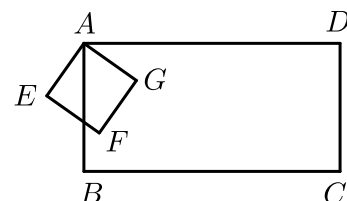
$\therefore$ 线段 DF 长度的最小值为 $BD - BF = 2\sqrt{13} - 4$ ，

故答案为： $2\sqrt{13} - 4$.



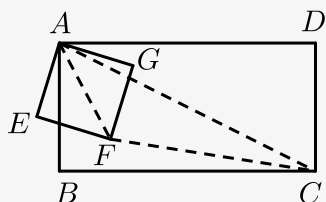
【标注】【知识点】翻折问题与勾股定理

21. 如图，长方形 $ABCD$ 中 $AB = 2$ ， $BC = 4$ ，正方形 $AEFG$ 的边长为1，正方形 $AEFG$ 绕点 A 旋转的过程中，线段 CF 的长的最小值为 _____ .



【答案】 $2\sqrt{5} - \sqrt{2}$

【解析】 如图，连接 AF ， CF ， AC ，



$\because$ 长方形 $ABCD$ 中 $AB = 2$ ， $BC = 4$ ，正方形 $AEFG$ 的边长为 1，

$\therefore AC = 2\sqrt{5}$ ， $AF = \sqrt{2}$ ，

$\therefore AF + CF \geq AC$ ，

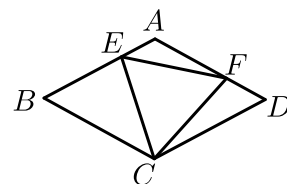
$\therefore CF \geq AC - AF$ ，

$\therefore$ 当点 A ， F ， C 在同一直线上时， CF 的长最小，最小值为 $2\sqrt{5} - \sqrt{2}$ 。

故答案为： $2\sqrt{5} - \sqrt{2}$ 。

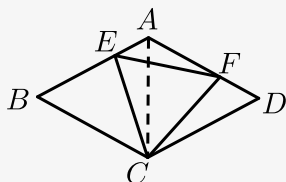
【标注】 【知识点】 正方形的性质

22. 如图，在菱形 $ABCD$ 中， $\angle B = 60^\circ$ ， $AB = 2$ ，点 E ， F 分别是边 AB ， AD 上的动点，且 $AE + AF = 2$ ，则线段 EF 的最小值为 _____。



【答案】 $\sqrt{3}$

【解析】 如图所示，连接 AC ，



$\because$ 四边形 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形， $\angle B = 60^\circ$ ，

$\therefore \triangle ABC$ 、 $\triangle CAD$ 都是边长为 2 的正三角形，

$$\therefore AB = BC = CD = AC = AD, \angle CAE = \angle ACB = \angle ACD = \angle CDF = 60^\circ,$$

$$\therefore AE + AF = 2,$$

$$\therefore AE = 2 - AF = AD - AF = DE,$$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle DCF$ 中,

$$\begin{cases} AE = DF \\ \angle CAE = \angle CDF, \\ AC = DC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ACE \cong \triangle DCF (\text{SAS}),$$

$$\therefore \angle ACE = \angle DCF, CE = CF,$$

$$\therefore \angle ACE + \angle ACF = \angle DCF + \angle ACF,$$

$$\therefore \angle ECF = \angle ACD = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle CEF$ 是等边三角形,

$$\therefore EF = CE,$$

当 $CE \perp AB$ 时, 即 E 为 AB 中点时,

CE 最小, 为 $\sqrt{3}$,

即 EF 的最小值为 $\sqrt{3}$.

故答案为: $\sqrt{3}$.

【标注】【知识点】菱形与全等综合